INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BRĂILA
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 18.02.2012

CLASA a XII a

1. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit de ordin impar şi $a,b\in G.$ Să se rezolve sistemul $\begin{cases} ax=b \\ bx=a \end{cases}.$

Gazeta Matematică

2. Fie $(A,+,\cdot)$ inel comutativ, $0\neq 1$ şi $H=\left\{a\in A \middle| (\exists) n\in\mathbb{N}^* \text{ cu } a^n=0\right\}.$ Să se arate că:

a) H este subgrup al grupului $(A,+)$.

b) Dacă $a\in H$ şi $p\in\mathbb{N}^*$, atunci $1-a^p$ şi $1+a^p$ sunt inversabile în inelul A şi avem $\left(1-a^p\right)^{-1}+\left(1+a^p\right)^{-1}=2\left(1+a^{2p}+a^{4p}+\dots\right).$

Gheorghe Alexe, Brăila

3. a) Aflaţi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care admite primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $2xF(x)+f(x)=x,(\forall)x\in\mathbb{R}.$

b) Demonstraţi că nu există $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care să admită primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât să avem relaţia: $\Big(\underbrace{f\circ f\circ\dots\circ f}_{2012 \text{ ori}}\circ g\Big)(x)=x^{2013},(\forall)x\in\mathbb{R},$ unde $g(x)=F(x)+ax, a\in\mathbb{R}.$

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{3+\sin^2 x}.$

a) Să se determine primitivele funcţiei $g:(0,\pi)\to\mathbb{R}, g(x)=f(x),(\forall)x\in(0,\pi).$

b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f nu este funcţie periodică.

c) Dacă F este primitiva funcţiei f cu $F(0)=0$, calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F(x)}{x}.$

Iulian Danielescu, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 7 puncte pentru fiecare subiect.Timp de lucru 3 ore.